Analyse de données et modèles stochastiques

19 novembre 2025

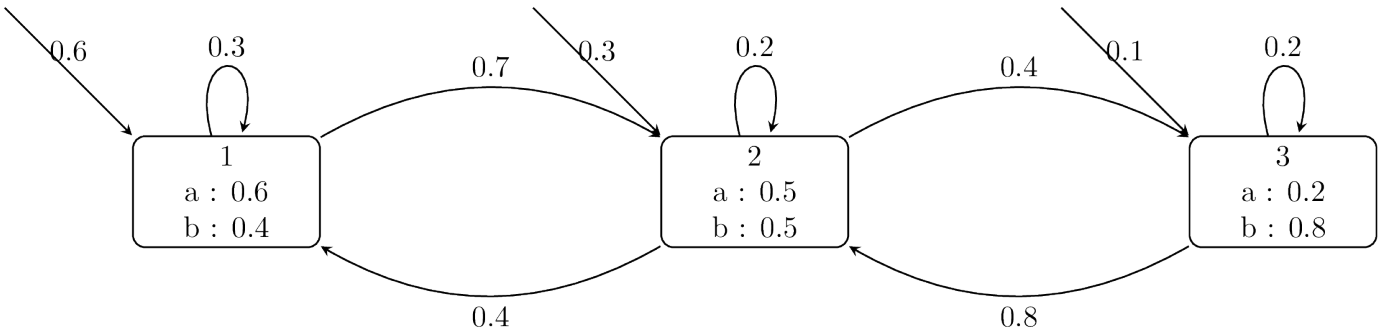
Durée : 1h15 (1h40 avec tiers-temps)

> Supports et notes de cours autorisées. Calculatrices autorisées.
>
> Les exercices sont indépendants. Les questions au sein des exercices peuvent pour la plupart être considérées comme indépendantes. Le nombre de point par exercice est donné à titre indicatif et pourra être modifié a posteriori, dans les limites du raisonnable.
>
> Quand vous répondez aux questions, ne vous limitez pas à un simple résultat. Donnez le détail de vos calculs et précisez le raisonnement suivi.

Exercice 1 – Chaînes de Markov cachées (10 points)

> On utilisera pour cet exercice la table des logarithmes simplifiés donnée en annexe.

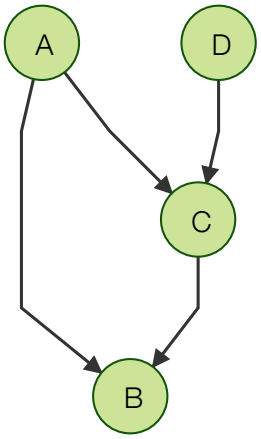
On considère un modèle de Markov caché à trois états $(1, 2, 3)$ portant sur un espace d'observation comportant deux symboles (a, b) et dont l'automate associé est



Questions

1. Quelles sont les matrices associées à cette chaîne de Markov cachée ?
2. Quelle est la probabilité de la séquence $(2, b)\ (1, a)\ (2, a)\ (3, b)\ (3, a)$?
3. À l'aide de l'algorithme de Viterbi, donnez la séquence d'état la plus vraisemblable pour la séquence d'observations $a\ b\ a$?
4. Le modèle de Markov caché repose sur deux hypothèses : l'hypothèse markovienne pour le processus caché ; l'hypothèse d'indépendance conditionnelle des données. Expliquez la première hypothèse (hypothèse markovienne) : définition, intéret, limite. On pourra s'appuyer pour cela sur un exemple concret.

Exercice 2 – Réseaux bayésiens (6 points)



On considère le réseau bayésien ci-dessus. Les variables sont binaires et le modèle est défini par les paramètres suivants :

$$P[A=0]=0.3 \quad P[D=0]=0.5 \quad P[C=0 \mid A,D]=$$

A	D	
0	0	0.3
0	1	0.1
1	0	0.8
1	1	0.5

$$P[B=0 \mid A,C]=$$

A	C	
0	0	0.4
0	1	0.8
1	0	0.1
1	1	0.2

.

Questions

1. Donnez la forme factorisée de la probabilité conjointe $P[A,B,C,D]$.
2. Calculez $P[B=0|A=1,D=0]$.

Exercice 3 – Test d'hypothèse (4 points)

Vous proposez une nouvelle architecture et vous voulez montrer qu'elle consomme moins que la meilleure architecture actuelle. Vous exécutez 10 programmes différents sur votre architecture et obtenez les consommations suivantes (en kWh) :

11.34 9.22 9.38 12.30 9.77 10.70 13.00 9.44 12.70 7.08

Questions

1. Pouvez-vous dire que la consommation de votre architecture est plus faible avec un niveau de confiance à 5%, en supposant que la distribution des consommation suit une loi gaussienne et sachant que la meilleure architecture consomme 9 kWh en moyenne pour ces même 10 progammes ? Préciser les hypothèses de votre test.

Si nécessaire, vous avez en annexe la table de la loi de Student.

Annexe

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$ln(x)$	-2.3	-1.6	-1.2	-0.9	-0.7	-0.5	-0.4	-0.2	-0.1

Quantile d'ordre γ de la loi de Student à k degrés de liberté.

	γ										
k	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291